

# Wittgenstein et la critique du logicisme

Sébastien Gandon,  
intervention du 25 mars 2010

## Introduction

Je vais essayer de faire trois choses : expliquer rapidement ce qu'est le logicisme russellien, dégager la critique que Wittgenstein adresse au logicisme dans la seconde partie de *Remarques sur les fondements des mathématiques*, suggérer, dans une conclusion, que la critique rate en partie sa cible. En gros, je pense que cette critique est puissante, mais qu'elle peut être conçue comme un instrument permettant de complexifier la lecture que l'on fait du logicisme russellien – que le logicisme a les ressources pour intégrer cette critique.

## I. Qu'est-ce que le logicisme ?

Le but affiché de Russell (texte 1) :

- définir l'ensemble des concepts mathématiques à partir des notions logiques : connecteurs propositionnels (l'implication), les quantificateurs, les ensembles, etc...
- prouver tous les théorèmes à partir des principes logiques : par exemple,  $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ , ce qui pour tout vaut aussi pour n'importe lequel.

Il faut effectuer les deux tâches pour que le programme soit réalisé : traduction des concepts en termes logiques / ensuite démonstration des théorèmes reformulés dans le langage de la logique.

Deux remarques :

1. la reformulation peut brouiller le sens intuitif des théorèmes. Par exemple,  $1+1 = 2$  ou le théorème de Pythagore. Dans la traduction ensembliste,  $1+1 = 2$  devient une proposition ne portant plus sur les nombres mais, par exemple, sur les ensembles. Russell : cette perte de familiarité n'est pas importante. Les propositions sont transformées au moyen des définitions, et elles ont donc la même signification. La réduction logique ne préserve pas l'ensemble des connotations psychologiques que nous associons aux concepts et propositions mathématiques usuelles.
2. la réduction peut masquer la forme des preuves. La reformulation dans le langage logique conduit à adopter des règles d'inférences données d'avance, et nous fait perdre les techniques de preuves propre aux disciplines qui supportent les démonstrations dans les « vraies » maths. Russell : ce n'est pas très important. Si la preuve familière est correcte, elle doit pouvoir être transformée en preuve rigoureuse dans le système logique. La vraie notion de preuve est donnée par la logique.

Je distinguerai deux critiques possibles du logicisme :

1/ Une critique technique : la plus simple, et la plus souvent entendue. Elle consiste à dire que le projet logiciste échoue : soit on ne peut pas définir en termes logiques certains concepts mathématiques ; soit, même si on peut les définir, on ne peut pas prouver à partir des prémisses

logiques certains théorèmes mathématiques. Ce serait bien si Russell pouvait faire ce qu'il avance, mais bon, il ne le peut pas, c'est comme ça. Sa logique n'est pas assez puissante pour retrouver tout ce qu'il veut retrouver et il est obligé d'introduire des considérations extra-logiques. Russell s'est lui-même adressé cette critique : pour éviter la contradiction, il devait affaiblir sa logique, et ne pouvait plus par exemple démontrer l'existence d'un ensemble infini, qui est pourtant nécessaire pour construire les rationnels et surtout le continu. Il a dû introduire l'axiome de l'infini, dont le statut est un peu étrange : il semble difficile de dire que la croyance qu'il y ait un nombre fini d'objets est contradictoire (monisme).

2/ Une critique philosophique : c'est celle-là, et celle-là uniquement, que je vais considérer. On ne dit pas que le logicisme est irréalisable – on dit qu'il n'est pas un bon programme. La critique ici admet que Russell peut réaliser son projet, qu'on peut traduire les maths dans la logique et prouver les vérités mathématiques dans un système logique, et on interroge la valeur de ce résultat. L'idée est en gros la suivante. Prenez deux mathématiciens : un expert en géométrie euclidienne et un expert en logique. Si la thèse de Russell était vraie, alors, sur le plan du contenu mathématique, l'expert en logique en saurait autant que l'expert en géométrie. Bien sûr, il ne serait pas familier avec certaines notations, il ne connaîtrait pas les détails de la théorie, etc... ; mais il suffirait de lui donner les quelques axiomes qui sont à la base de la théorie, pour qu'il puisse tout reconstruire. C'est l'idée que tout ce qui était versé chez Russell au titre de représentations psychologiques associées aux concepts et aux preuves font partie intégrante du contenu mathématique. Pour voir si réduction rate quelque chose, il faut imaginer qu'un mathématicien ne connaisse que la logique – connaîtrait-il toutes les mathématiques ? Réponse : non.

Stratégie anti-réductionniste classique : David Marr dans *Vision*. Celui qui connaît très bien l'anatomie de la rétine et du nerf optique rate quelque chose concernant son objet : il rate l'essentiel même, son principe d'organisation, ce qui structure l'anatomie, à savoir la fonction de traiter le signal visuel. (Putnam : fonctionnaliste en philo de l'esprit / structuraliste en philo des maths).

## II. Poincaré contre Russell : le caractère indispensable de l'intuition

Poincaré critique explicitement le logicisme de Russell. L'extrait de *Science et Méthode* (la définition en mathématique) est à ma connaissance le texte où Poincaré explicite de façon la plus claire ses réserves à l'égard du projet logiciste. Poincaré met en place un système de trois oppositions qui conduit à une opposition générique entre logique et mathématique. Je donne ces oppositions, et je vais lire ensuite les extraits, très clairs, me semble-t-il :

- être convaincu de la correction d'un théorème ou d'une preuve / comprendre le théorème ou la preuve
- caprice et contingence des combinaisons et des enchaînements déductifs / finalité qui préside à l'organisation des définitions et des preuves.
- atomisme / organicisme, totalité décliné en logique, grammaire, critique / intuition, idée, invention.

Je lis les textes, qui sont très clairs et suggestifs (textes 2, 3 et 4) :

Comprendre la démonstration d'un théorème, est-ce examiner successivement chacun des syllogismes dont elle se compose et constater qu'il est correct, conforme aux règles du jeu ? De même comprendre une définition, est-ce seulement reconnaître qu'on sait déjà le sens de tous les termes employés et constater qu'elle n'implique aucune contradiction ?

Oui, pour quelques-uns ; quand ils auront fait cette constatation, ils diront : j'ai compris. Non, pour le plus grand nombre. Presque tous sont beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre, plutôt que dans tel autre. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice, et non par une intelligence constamment consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris. Notre corps est formé de cellules et les cellules d'atomes ; ces cellules et ces atomes sont-ils donc toute la réalité du corps humain ? La façon dont ces cellules sont agencées, et dont résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité et beaucoup plus intéressante ? Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ? Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'œuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander.

Prenons par exemple l'idée de fonction continue. Ce n'est d'abord qu'une image sensible, un trait tracé à la craie sur le tableau noir. Peu à peu elle s'épure ; on s'en sert pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduit toutes les lignes de l'image primitive ; quand tout a été terminé, on a décintré, comme après la construction d'une voûte ; cette représentation grossière, appui désormais inutile, a disparu et il n'est resté que l'édifice lui-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et pourtant, si le professeur ne rappelait l'image primitive, s'il ne rétablissait momentanément le cintre, comment l'élève devinerait-il par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ? La définition serait logiquement correcte, mais elle ne lui montrerait pas la réalité véritable. [Parler en termes de compétence : si on enlève la théorie cible, on ne sait plus ce que les définitions nous disent.]

C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. Savoir critiquer est bon, savoir créer est mieux. Vous savez reconnaître si une combinaison est correcte ; la belle affaire si vous ne possédez pas l'art de choisir entre toutes les combinaisons possibles. La logique nous apprend que sur tel ou tel chemin nous sommes sûrs de ne pas rencontrer d'obstacle ; elle ne nous dit pas quel est celui qui mène au but. Pour cela il faut voir le but de loin, et la faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition. Sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.

Le logicisme manquerait les mathématiques parce qu'il n'offrirait pas de théorie de la compréhension mathématique, ne donnerait pas les raisons qui motivent les définitions et les cheminements déductifs et n'offrirait pas de théorie des formes d'organisation de haut niveau (des *Gestalt*) qui dirigent l'activité des mathématiciens.

On pourrait dire les choses autrement. Il y a, selon Poincaré, un double écueil qu'il faudrait éviter lorsque l'on contemple les mathématiques : les regarder de trop près, ou les regarder de trop loin (un peu comme un tableau en perspective qui demande d'être contemplé d'un certain point). Le logicisme réussirait à commettre ces deux erreurs en même temps. Il regarde les mathématiques de trop près : Russell se concentre sur les micro-enchaînements des preuves sans être capable de ressaisir leur schéma d'ensemble (trop près du tableau, on ne voit que les pigments). Mais aussi, les logicistes abordent leur sujet de trop loin : la logique ne porte pas sur un sujet particulier, et affiche l'ambition de porter sur toutes les disciplines – d'être applicable à toutes les théories et toutes les preuves indifféremment (de trop loin le motif disparaît). La position du logiciste est donc à la fois trop proche et trop lointaine. C'est seulement en acceptant de faire une place à l'intuition, selon Poincaré, que l'on peut trouver la distance juste à partir de laquelle observer son objet – que l'on peut recentrer son regard.

L'opposition fondamentale entre logique et mathématique est donc l'opposition entre logique et intuition. L'idée est qu'il est possible de reconstruire les maths comme les logicistes l'entendent (une hypothèse qui n'est pas toujours faite chez Poincaré) – MAIS qu'en faisant cela, on rate ce qui constitue le contenu essentiel des math : la spécificité des disciplines et les schémas d'ensemble qui président à l'élaboration des preuves et des concepts. On n'a accès à ces deux choses que lorsque l'on se réfère aux intuitions des mathématiciens (intuition au pluriel, je pense). Problème : cette référence à intuition est une référence à une distinction sensibilité/entendement, DONC à une théorie des facultés, qui n'est toutefois pas véritablement élaborée chez Poincaré, contrairement à chez Kant. Mais Kant ne peut pas être repris, car les maths qu'il a devant lui ne sont pas celles de Poincaré.

Cette critique de Poincaré – que le logicisme ne permet pas de développer une théorie de la compréhension mathématique, des formes conceptuelles mathématiquement intéressantes – est une objection très efficace, qui est utilisée par des philosophes des maths contemporains (voir par exemple Avigad et Detlefsen). Ces mêmes philosophes se réclament souvent également de Wittgenstein vers qui je vais maintenant me tourner.

### **III. Wittgenstein contre Russell : la critique sans l'intuition**

Wittgenstein adresse à Russell exactement la même critique que Poincaré – le logicisme ne se tiendrait pas à la bonne distance de son objet et raterait quelque chose de fondamental dans les maths. A la différence de Poincaré, toutefois, Wittgenstein ne fait pas appel à l'intuition pour expliquer ce que le logicisme rate. Il reprend les oppositions mises en place par Poincaré, mais il ne les base pas sur l'opposition intuition / logique. Mon point, que je développerai dans un quatrième moment conclusif, est que cette absence rend sa position instable. Le premier point est que Wittgenstein ne remet pas en cause la faisabilité technique du programme russellien. (Voir le texte 5)

Que veut montrer celui qui veut que les mathématiques ne sont pas de la logique ? Il veut bien dire quelque chose comme : Si on enveloppe des tables, des chaises, des armoires, etc., dans autant de papier qu'il faut, ils finiront bien par paraître sphériques.

Il ne veut pas montrer qu'il est impossible de construire pour chaque preuve mathématique une preuve russellienne qui lui « corresponde » (de quelque façon), mais que la reconnaissance d'une telle correspondance ne repose pas sur la logique.

Cet extrait est fondamental dans la lecture que je propose. On y reviendra. Wittgenstein prend la peine de dire en tout cas que sa critique n'est pas technique. On peut distinguer un peu artificiellement deux pans dans cette critique : la critique de l'uniformisation et l'objection en rapport avec la vue synoptique.

#### **a/ La critique de l'uniformisation**

La première objection vise les définitions. L'idée est en gros que les mathématiques ressemblent à un tissu d'Arlequin : elles sont constituées de différents systèmes de preuves et de différents échafaudages conceptuels, de différentes techniques, dit souvent Wittgenstein, qu'il est important de ne pas confondre si on veut avoir une claire vue de ce que sont les maths. Non seulement les maths sont diverses, mais cette diversité est essentielle aux maths. Le but de l'éclaircissement philosophique est, selon Wittgenstein, de différencier certains usages – la qualité philosophique la plus grande est peut-être celle d'avoir du discernement. (Anecdote de la

maison qu'il a construit en 1927 : les portes sont lourdes et poignées sont hautes pour forcer les habitants à reconnaître qu'ils entrent ou sortent d'une pièce).

Or, que fait Russell ? Il uniformise les notations et donc les environnements, en adoptant un unique langage. Il fait donc précisément ce qu'il faut éviter de faire en philosophie. (On a des tables, des chaises, des armoires, ... et au lieu de les différencier, on les enveloppe afin qu'elles deviennent sphériques : on les empaquète pour leur donner le même aspect. Dès la *Grammaire*, on trouve cette critique de l'emballage). "J'inclinerais à dire : les mathématiques sont une mixture BIGARRÉE de techniques de démonstration..." (texte 6)

Plus précisément, Wittgenstein ne conteste pas que l'on puisse plonger les différentes maths dans le système logique, mais il affirme que cette immersion est elle-même une opération mathématique. Ce qui le conduit à refuser l'idée qu'on aurait réduit les maths à la logique = pour pouvoir attester de la réussite du projet, i.e. de la réduction des maths à la logique, on a besoin, métathéoriquement, d'user des maths.

Et c'est comme si nous disions : celui qui posséderait un système semblable au système russellien et produirait à partir de lui, au moyen de systèmes adéquats de définition, des systèmes tels que le calcul différentiel, celui-là découvrirait un nouveau domaine mathématique. Maintenant l'on pourrait dire simplement : si un homme avait découvert le calcul dans le système décimal – il aurait fait une découverte mathématique ! – Même s'il avait eu sous les yeux les *Principia Mathematica* de Russell.

Qu'en est-il lorsqu'on coordonne un système de preuves à un autre ? Il existe alors une règle de traduction qui permet de traduire les propositions prouvées dans un système, en propositions prouvées dans l'autre.

Mais on peut imaginer que quelques – ou tous les – systèmes de preuves des mathématiques modernes seraient subordonnés de cette façon à un système – le système russellien par exemple. De telle sorte que toutes les preuves, même compliquées, pourraient être effectuées dans ce système. Ainsi il n'y aurait que ce système – et non une multiplicité de systèmes ? Mais il faut que l'on puisse montrer que cet unique système peut se décomposer en cette multiplicité d'autres. – Une partie du système possédera la propriété de la trigonométrie, une autre celle de l'algèbre et ainsi de suite. On peut donc dire que différentes techniques sont employées dans ces parties. Je disais : celui qui a découvert le calcul décimal a fait une découverte mathématique. Mais n'aurait-il pu faire cette découverte en utilisant uniquement les symboles russelliens ? Il aurait en quelque sorte découvert un nouvel aspect.

#### b/ L'exigence de synopticit 

Il y a un second pan à cette critique wittgensteinienne qui concerne plus spécifiquement les preuves. La manœuvre russellienne consiste à faire correspondre à une preuve ordinaire une autre preuve (la preuve primaire) explicitée dans le langage logique. Or, explique Wittgenstein, cette preuve primaire est nécessairement beaucoup plus longue que la preuve ordinaire – longue à tel point que l'on ne peut pas en avoir une vue d'ensemble, sans réintroduire précisément les concepts que la réduction est censée éliminée. Cf. Poincaré : de multiples chemins s'ouvrent à chaque étape de la preuve, et les choix se font en fonction d'une « pattern », d'une vue d'ensemble (l'expression est chez Poincaré), qui sont véhiculés par les concepts utilisés dans la preuve ordinaire. Eliminer ces concepts, c'est se priver du moyen saisir l'articulation des preuves. on peut réduire la preuve ordinaire à une preuve logique – mais on perd de vue ce faisant ce qui prouve dans la preuve. Wittgenstein prend notamment l'exemple de l'écriture des nombres. Il affirme qu'une addition

entre 2 et 3, par exemple, serait traduite par une tautologie, de la forme : ( $x_1 x_2 \dots \& x_3 x_4 x_5 \dots$ )  $\supset x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \dots$ . Pour comprendre la preuve de la tautologie, il faut avoir la capacité de regrouper les variables de façon adéquate, c'est-à-dire lorsque le nombre de variables devient trop important, introduire d'une façon ou d'une autre des indices. Si on n'effectue pas cette opération, alors on ne peut plus comprendre la preuve. La *Beweiskraft*, ce qui prouve dans la preuve est perdu.

L'idée de Wittgenstein n'est pas de dire : la définition des nombres de Russell est circulaire, car elle utilise la notion de nombre. Elle est de dire que la preuve est essentiellement liée à un pouvoir de persuasion et que ce pouvoir tient à l'élaboration et à la maîtrise d'un système d'abréviation. (texte 7).

J'inclinerais à dire que lorsque le caractère synoptique fait défaut, lorsqu'on ne peut avoir de vue d'ensemble de la preuve, lorsqu'on peut douter d'avoir sous les yeux le résultat [d'une] substitution, la preuve est détruite. Et non pas d'une façon idiote et négligeable qui ne concernerait pas l'essence de la preuve..." (texte 8).

Cela signifie : la preuve logique de type russellien n'a de puissance démonstrative que dans la mesure où elle possède également une puissance persuasive géométrique. Et l'abréviation d'une telle preuve logique peut posséder cette puissance de persuasion et être grâce à elle une preuve, alors que la construction entièrement effectuée sur le mode russellien n'en est pas une. Nous tendons à croire que la preuve logique possède une puissance de démonstration absolue qui lui est propre et qui provient de la certitude inconditionnelle des principes logiques de raison et d'inférences. Alors que les propositions démontrées de cette façon ne peuvent pas être plus sûres que ne l'est l'exactitude de l'application de ces lois d'inférence. La certitude logique des preuves – veux-je dire – ne dépasse pas leur certitude géométrique.

Résumons. L'argument de la bigarrure tendait à montrer que l'uniformisation induite par la logicisation masquait un élément fondamental des maths. Le second argument, l'exigence de synopticit , renverse complètement le schéma russellien, puisqu'il tend à établir que les véritables preuves se trouvent dans les systèmes particuliers réduit par le logiciste, et non pas dans la théorie logique de base. L'idée fondamentale, dans le premier comme dans le second argument, est extrêmement proche de l'argument que développe Poincaré : la logicisation réussie manque la compréhension des concepts et des preuves mathématiques, elle rate les schémas d'ensemble qui président aux opérations des mathématiciens et ce qui fait la spécificité des diverses disciplines mathématiques.

Mais Wittgenstein, à la différence de Poincaré, ne fait pas appel à la notion trop psychologique d'intuition. C'est plutôt en reprenant les termes mêmes du logicisme que Wittgenstein exprime sa critique : la coordination du système logique aux maths est mathématique, c'est-à-dire que la force des preuves appartient aux preuves des systèmes cibles, et non du système englobant.

#### **IV. Le statut de la logique**

J'en arrive à ma conclusion, qui est de suggérer que ces critiques wittgensteiniennes ratent leur cible. Ce que je voudrais tenter de montrer est que Wittgenstein est dans une position extrêmement instable, car il veut tout à la fois rejeter les tendances épistémologiques d'un Poincaré et le logicisme d'un Russell. Or, pour atteindre son but, il me semble que Wittgenstein caricature quelque peu le projet logiciste auquel il s'attaque.

La question est donc à la fois historique et philosophique. Elle est de montrer que le logicisme de Russell ne ressemble pas à la description qu'en donne Wittgenstein – mais elle est aussi de

souligner que, une fois que l'on a compris cela, alors une question concernant la stabilité et la cohérence de la position wittgensteinienne à l'égard des maths est soulevée. L'idée qu'il faudrait plus de temps pour développer est la suivante : Russell n'entend pas par logique ce que Wittgenstein entend. La logique ne désigne pas chez Russell seulement le système fondamental auxquels les autres systèmes maths devraient être coordonnés de l'extérieur ; la logique, que ce soit dans les *Principles* ou dans les *Principia* désigne à la fois un contenu (un système) et le mode de développement de ce contenu. La logique n'occupe pas seulement un niveau, mais tous les niveaux, ce qui veut dire également qu'elle prend en charge les systèmes de définition.

Je vais rapidement reprendre les deux objections faite par Wittgenstein :

### 1/ L'objection de l'uniformisation

Wittgenstein feint de faire comme si la notation était uniforme dans les *Principia*, comme si Russell revenait à un langage de base. Or dès le début des *Principia*, des systèmes notationnels non analysés sont introduits, et utilisés dans les preuves – les déductions se déroulent dans des cadres qui ne sont pas le cadre fondamental, complètement analysé. Les *Principia* eux-mêmes sont bigarrés.

La notation du calcul différentiel, que prend Wittgenstein, est explicitement pris par Russell comme un exemple de symbole incomplet – c'est-à-dire comme un exemple de ces notations de « haut niveau », qui sans être analysée, sont logiquement parfaites et servent à l'exposition des maths. Ce que feint de ne pas voir Wittgenstein est que, pour Russell aussi, l'invention de la notation du calcul différentiel est une découverte logique, c-à-d math. (texte 9)

L'adaptation des règles du symbolisme aux procédés de déduction vient aider l'intuition dans des régions trop abstraites pour que l'imagination puisse présenter facilement à l'esprit la véritable relation qui unit les idées employées. Car certains assemblages de symboles finissent par devenir des représentations familières d'assemblages importants d'idées ; les relations possibles – selon les règles du symbolisme – entre ces assemblages de symboles deviennent des relations à leur tour familières, et ces nouveaux assemblages représentent des relations encore plus compliquées entre les idées abstraites. Et l'esprit est ainsi finalement conduit à construire des suites de raisonnements dans des régions de la pensée où l'imagination serait tout à fait incapable de subsister sans l'aide du symbolisme.

Le texte de Russell ne progresse jamais ni purement verticalement ni purement horizontalement. Il se développe toujours obliquement. Bien entendu, en droit il est toujours possible de revenir à la notation fondamentale (mais Wittgenstein ne conteste pas ce point) – simplement la logique nous permet de ne pas revenir au langage de base : elle crée les possibilités de son oubli. Je pourrai dire les choses autrement : il y a une théorie de la connaissance aveugle, au sens leibnizien du terme, dans les *Principia*. Les systèmes math ordinaires n'ont pas à être complètement analysés pour être logiquement en ordre chez Russell comme chez Leibniz. L'idée n'est pas ici et là de remplacer les maths ordinaires par un calcul fondamental – mais de manifester l'articulation logique de ses « techniques », pour reprendre un terme wittgensteinien.

### 2/ L'objection du caractère non synoptique des preuves

Il est faux que Russell revienne dans ses preuves à une notation complètement analysée, donc que les preuves des *Principia* soient « trop longues ». Deux mises au point :

- L'addition entre entiers n'est pas conçue comme le pense Wittgenstein. Il y a plusieurs notions à distinguer dans l'addition des entiers, selon Russell.

- L'addition des cardinaux :

\*110.02  $m + n = x \{ \aleph_a, \aleph_b \mid (m = \aleph_a \ \& \ n = \aleph_b \ \& \ x \sim (a + b)) \}$  Def

Pas de retour au décompte des variables. Notation de « haut niveau » ; des classes, surtout une addition entre classes qui n'est pas une union (fonctionne même avec des classes dont l'intersection n'est pas vide). Comme l'addition est définie sans égard à la distinction fini / infini, il est clair que la notation des entiers finis n'est pas la question que Russell se pose.

La définition des ordinaux finis

\*120.01 :  $\aleph_{\text{induct}} = \aleph_{\{a(+1)*0\}}$ . Affirme que ces cardinaux sont ceux qui sont exprimés par le système arabe de numérotation. Russell ne le prouve pas. Montre quand même que l'addition et la multiplication sont closes sur  $\aleph_{\text{induct}}$ . Pourquoi ne parle-t-il pas de la notation décimale ? Il pourrait développer une algèbre des polynômes, donc une théorie des bases et de la notation arabe. Ne le fait pas parce que pas intéressé – pas parce qu'il ne peut pas le faire. (texte 10)

On trouve dans les *Principia* une recherche de la plus grande généralité. Parfois cela conduit à des maladresses dans l'expression, comme Russell le reconnaît dans la *Lettre à Couturat* : il faut trouver un équilibre entre le niveau global du livre et les niveaux plus locaux des chapitres et des disciplines particulières.

Mais l'exigence de généralité ne joue pas toujours contre l'exigence d'avoir des preuves synoptiques, qui mettent en avant de façon claire leur *Beweiskraft*. Par exemple, en analyse, Russell cherche à montrer que l'on peut et que l'on doit développer la théorie des limites et de la convergence dans le cadre d'une théorie générale des séries, et couper le lien entre l'analyse et les nombres réels. Les preuves sur les limites n'ont rien à voir avec les réels, notamment avec les distances – elles portent uniquement sur les structures d'ordre. Ici, on pourrait tout à fait soutenir que l'exposé russellien satisfait à la demande wittgensteinienne consistant à isoler ce qui prouve réellement dans les preuves. En analyse, les preuves sont supportés par les structures ordinales, pas par la référence aux réels.

## Conclusion

Wittgenstein reprend un argument de Poincaré – le logicisme est condamnable non pas parce qu'il échoue techniquement, mais parce qu'il rate complètement ce que l'on peut appeler la compréhension math, ou la spécificité des théories et des pratiques math. Mais Wittgenstein refuse d'adopter une posture épistémologique (trop psychologique). Wittgenstein occupe donc une position intermédiaire entre Russell et Poincaré. Adopte critiques de Poincaré, mais refuse son psychologisme (théorie des facultés).

Du coup, il est difficile de voir ce qui le distingue de Russell. Pour Poincaré, les choses étaient claires : ce que le logicisme rate, il le rate nécessairement, car les phénomènes ratés sont fondés sur une intuition, hétérogène aux concepts – il y a là une dénivellation épistémologique. Mais Wittgenstein refuse ce dernier point. Pourquoi le logicisme raterait-il nécessairement les choses que Wittgenstein pointe ? Que Russell n'ait pas parlé de la notation arabe, ne veut pas dire qu'il n'aurait pas pu en parler. Il y a une instabilité dans la position de Wittgenstein : appelle-t-il comme Poincaré à une rupture avec le logicisme, ou bien seulement à un raffinement du logicisme ?

On pourrait exprimer les choses autrement, de façon sans doute plus constructive. On pourrait prendre les textes apparemment critiques de Wittgenstein à l'encontre de Russell comme des



tentatives de retourner Russell contre lui-même. Wittgenstein est à mon avis un lecteur très pertinent, mais particulier : il joue souvent les auteurs qu'il lit contre eux-mêmes (Frege contre Frege, Russell contre Russell). J'ai souvent tendance (peut-être trop ?) à voir ces critiques aussi comme des prolongements inattendus de l'œuvre de ce qui sont critiqués. Cf. texte 12).

1) Russell, *Principes*, 1903, §9, p. 28 : La mathématique ne doit contenir aucun autre indéfinissable que des constantes logiques, et par conséquent aucune autre prémisse ou proposition indémontrable que celles qui traitent exclusivement des constantes logiques et des variables.

2) Poincaré, *Science et Méthode*, 1908, pp. 65-66 : Comprendre la démonstration d'un théorème, est-ce examiner successivement chacun des syllogismes dont elle se compose et constater qu'il est correct, conforme aux règles du jeu ? De même comprendre une définition, est-ce seulement reconnaître qu'on sait déjà le sens de tous les termes employés et constater qu'elle n'implique aucune contradiction ? Oui, pour quelques-uns ; quand ils auront fait cette constatation, ils diront : j'ai compris. Non, pour le plus grand nombre. Presque tous sont beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes d'une démonstration sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre, plutôt que dans tel autre. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice, et non par une intelligence constamment consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris.

3) Poincaré, *Ibid*, pp. 70-71 : Notre corps est formé de cellules et les cellules d'atomes ; ces cellules et ces atomes sont-ils donc toute la réalité du corps humain ? La façon dont ces cellules sont agencées, et dont résulte l'unité de l'individu, n'est-elle pas aussi une réalité et beaucoup plus intéressante ? Un naturaliste qui n'aurait jamais étudié l'éléphant qu'au microscope croirait-il connaître suffisamment cet animal ?

Il en est de même en mathématiques. Quand le logicien aura décomposé chaque démonstration en une foule d'opérations élémentaires, toutes correctes, il ne possédera pas encore la réalité tout entière ; ce je ne sais quoi qui fait l'unité de la démonstration lui échappera complètement. Dans les édifices élevés par nos maîtres, à quoi bon admirer l'œuvre du maçon si nous ne pouvons comprendre le plan de l'architecte ? Or, cette vue d'ensemble, la logique pure ne peut nous la donner, c'est à l'intuition qu'il faut la demander.

Prenons par exemple l'idée de fonction continue. Ce n'est d'abord qu'une image sensible, un trait tracé à la craie sur le tableau noir. Peu à peu elle s'épure ; on s'en sert pour construire un système compliqué d'inégalités, qui reproduit toutes les lignes de l'image primitive ; quand tout a été terminé, on a décintéré, comme après la construction d'une voûte ; cette représentation grossière, appui désormais inutile, a disparu et il n'est resté que l'édifice lui-même, irréprochable aux yeux du logicien. Et pourtant, si le professeur ne rappelait l'image primitive, s'il ne rétablissait momentanément le cintre, comment l'élève devinerait-il par quel caprice toutes ces inégalités se sont échafaudées de cette façon les unes sur les autres ? La définition serait logiquement correcte, mais elle ne lui montrerait pas la réalité véritable.

4) Poincaré, *Ibid.*, p. 72 : C'est par la logique qu'on démontre, c'est par l'intuition qu'on invente. Savoir critiquer est bon, savoir créer est mieux. Vous savez reconnaître si une combinaison est correcte ; la belle affaire si vous ne possédez pas l'art de choisir entre toutes les combinaisons possibles. La logique nous apprend que sur tel ou tel chemin nous sommes sûrs de ne pas rencontrer d'obstacle ; elle ne nous dit pas quel est celui qui mène au but. Pour cela il faut voir le but de loin, et la faculté qui nous apprend à voir, c'est l'intuition. Sans elle, le géomètre serait comme un écrivain qui serait ferré sur la grammaire, mais qui n'aurait pas d'idées.

5) Wittgenstein, *Remarques sur les fondements des mathématiques*, § 53 : Que veut montrer celui qui veut que les mathématiques ne sont pas de la logique ? Il veut bien dire quelque chose comme : -- Si on enveloppe des tables, des chaises, des armoires, etc., dans autant de papier qu'il faut, ils finiront bien par paraître sphériques.

Il ne veut pas montrer qu'il est impossible de construire pour chaque preuve mathématique une preuve russellienne qui lui « corresponde » (de quelque façon), mais que la reconnaissance d'une telle correspondance ne repose pas sur la logique.

6) Wittgenstein, *Ibid.*, § 46 : J'inclinerais à dire : les mathématiques sont une mixture BIGARRÉE de

techniques de démonstration. [...] Et c'est comme si nous disions : celui qui posséderait un système semblable au système russellien et produirait à partir de lui, au moyen de systèmes adéquats de définition, des systèmes tels que le calcul différentiel, celui-là découvrirait un nouveau domaine mathématique. Maintenant l'on pourrait dire simplement : si un homme avait découvert le calcul dans le système décimal – il aurait fait une découverte mathématique ! – Même s'il avait eu sous les yeux les « Principia Mathematica » de Russell.

Qu'en est-il lorsqu'on coordonne un système de preuves à un autre ? Il existe alors une règle de traduction qui permet de traduire les propositions prouvées dans un système, en propositions prouvées dans l'autre.

Mais on peut imaginer que quelques – ou tous les – systèmes de preuves des mathématiques modernes seraient subordonnés de cette façon à un système – le système russellien par exemple. De telle sorte que toutes les preuves, même compliquées, pourraient être effectuées dans ce système. Ainsi il n'y aurait que ce système – et non une multiplicité de systèmes ? – Mais il faut que l'on puisse montrer que cet unique système peut se décomposer en cette multiplicité d'autres. – Une partie du système possédera la propriété de la trigonométrie, une autre celle de l'algèbre et ainsi de suite. On peut donc dire que différentes techniques sont employées dans ces parties.

Je disais : celui qui a découvert le calcul décimal a fait une découverte mathématique. Mais n'aurait-il pu faire cette découverte en utilisant uniquement les symboles russelliens ? Il aurait en quelque sorte découvert un nouvel aspect.

7) Wittgenstein, Ibid., §8 : La tautologie russellienne qui correspond à la proposition  $a + b = c$  ne nous montre pas dans quelle notation écrire le nombre  $c$ , et il n'y a pas de raison pour qu'il ne soit pas écrit sous la forme  $a + b$ . – Car Russell ne nous enseigne d'aucune façon la technique de l'addition dans le système décimal. – Mais peut-être pourrions-nous le déduire de sa technique ?  
 $2 + 3 = 5$      $\hat{U}$      $(\text{\$}x1\text{\$}x2 \dots \& \text{\$}x3\text{\$}x4\text{\$}x5\dots) \text{P } \text{\$}x1\text{\$}x2\text{\$}x3\text{\$}x4\text{\$}x5\dots$

8) Wittgenstein, Ibid., §43 : J'inclinerais à dire que lorsque le caractère synoptique fait défaut, lorsqu'on ne peut avoir de vue d'ensemble de la preuve, lorsqu'on peut douter d'avoir sous les yeux le résultat [d'une] substitution, la preuve est détruite. Et non pas d'une façon idiote et négligeable qui ne concernerait pas l'essence de la preuve.

Ou bien : la logique comme fondement des mathématiques ne fonctionne pas, et ce parce que la puissance démonstrative de la preuve logique coïncide et se confond avec sa puissance démonstrative géométrique [qui a trait à la transformation des signes].

Cela signifie : la preuve logique de type russellien n'a de puissance démonstrative que dans la mesure où elle possède également une puissance persuasive géométrique. Et l'abréviation d'une telle preuve logique peut posséder cette puissance de persuasion et être grâce à elle une preuve, alors que la construction entièrement effectuée sur le mode russellien n'en est pas une.

Nous tendons à croire que la preuve logique possède une puissance de démonstration absolue qui lui est propre et qui provient de la certitude inconditionnelle des principes logiques de raison et d'inférences. Alors que les propositions démontrées de cette façon ne peuvent pas être plus sûres que ne l'est l'exactitude de l'application de ces lois d'inférence.

La certitude logique des preuves – veux-je dire – ne dépasse pas leur certitude géométrique.

9) *Principia Mathematica*, 1910, p. 223 : L'adaptation des règles du symbolisme aux procédés de déduction vient aider l'intuition dans des régions trop abstraites pour que l'imagination puisse présenter facilement à l'esprit la véritable relation qui unit les idées employées. Car certains assemblages de symboles finissent par devenir des représentations familières d'assemblages importants d'idées ; les relations possibles – selon les règles du symbolisme – entre ces assemblages de symboles deviennent des relations à leur tour familières, et ces nouveaux assemblages représentent des relations encore plus compliquées entre les idées abstraites. Et l'esprit est ainsi finalement conduit à construire des suites de raisonnements dans des régions de la pensée où l'imagination serait tout à fait incapable de subsister sans l'aide du symbolisme.

10) Les nombres finis dans les *Principia* :

\*110.02  $m + n = x\{a, b \mid (m = Nc'a \ \& \ n = Nc'b \ \& \ x \sim (a + b))\}$  Def  
 \*120.01 :  $NC \text{induct} = a\{a(+1)*0\}$  Def

11) Russell, *lettre à Couturat du 5 juillet 1904* : Les questions de symbolisme sont en effet très importantes et très difficiles. Quand il y a besoin d'un symbolisme pour un livre entier, nous avons trouvé, Whitehead et moi, que dans chaque partie, il est nécessaire d'adopter une notation qui n'est pas

aussi commode qu'elle pourrait l'être si on écrivait un mémoire spéciale sur cette partie du sujet.

12) Wittgenstein, *Remarques Mêlées*, p. 19 : On pourrait dire (à tort ou à raison) que l'esprit juif n'est pas capable de produire le moindre brin d'herbe ou la moindre fleurette, mais que sa manière à lui consiste à reproduire le brin d'herbe ou la fleur qui ont poussé dans l'esprit d'autrui et de projeter à partir de là un tableau d'ensemble. [...] Il est typique de l'esprit juif de comprendre l'œuvre d'un autre mieux que celui-ci ne le fait lui-même.